

# LA BUSQUEDA DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA: EULER Y D'ALEMBERT\* †

*Ángel E. Romero*  
Universidad de Antioquia

## RESUMEN

A través de este escrito se pretende dar a conocer algunos aportes de la fundamentación de la ciencia de la mecánica en el siglo XVIII adelantados por Leonhard Euler y ponerlos en relación con algunas de las respectivas propuestas de Jean le Rond d'Alembert. Se resalta, en particular, que las preocupaciones de estos dos pensadores no se limitan sólo a una intención de matematización de la ciencia de la mecánica. También existe en ellos la intención explícita de clarificación de la mecánica a través de la *reorganización conceptual* de las nociones primeras y de la identificación de los principios en los que debe fundamentarse esta ciencia, ambas intenciones soportadas en presupuestos epistemológicos sobre la certeza y la validez de nuestro conocimiento.

**Palabras clave :** Fundamentos de la Mecánica, Leonhard Euler, Jean le Rond D'alembert, formalización, relación entre física y matemáticas, conceptualización física.

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, on espère faire connaître certaines des contributions apportées par Leonhard Euler à l'établissement des fondements de la science de la mécanique dans le XVIIIème siècle et les mettre en relation avec quelques unes des propositions correspondantes chez Jean le Rond d'Alembert. On souligne, en particulier, que les préoccupations de ces deux penseurs ne se limitent pas au seul dessein de mathématiser la science de la mécanique. Il existe aussi chez eux l'intention déclarée de clarifier la mécanique par une *réorganisation conceptuelle* des notions premières et par l'identification des principes sur lesquels doivent s'établir les fondements de cette science ; et tous les deux fondent leurs perspectives sur des présupposés épistémologiques communes concernant la validité et la certitude de notre connaissance.

---

\* **Recibido** Marzo de 2007; **aprobado** Mayo de 2007.

† Este artículo hace parte de los resultados de la investigación *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos. El caso de los fenómenos mecánicos*, UdeA-CODI, UPN-CIUP, 2004-2007. Una versión inicial de este texto fue presentado en la *Conferece "d'Alembert i lumini, l'Europe"*, celebrado entre el 24 y 29 de septiembre de 2006 en Trento, Italia.

**Mots clés :** Fondements de la mécanique, Leonhard Euler, Jean le Rond D’alembert, formalisation, rapport entre physique et mathématiques, conceptualisation physique.

## 1. Introducción

Usualmente se considera la mecánica como una rama de las matemáticas. En este sentido se afirma comúnmente que los orígenes de lo que hoy se conoce como *mecánica analítica* en el siglo XVIII corresponden a la historia de la transformación adelantada por un reducido número de “geómetras” o “algebristas”, quienes tenían la *sola* intención de expresar matemáticamente las leyes que rigen la experiencia física.

En la mayoría de los casos estas afirmaciones son justificadas en el hecho que los “geómetras” del siglo XVIII estuvieron muy preocupados por distinguir entre lo que ellos llamaban *verdades necesarias* y *verdades contingentes*. Las primeras fueron para ellos las verdades generales, demostrables *a priori* por el razonamiento. Las segundas, al contrario, designaban las verdades experimentales, sea que se verifiquen directamente por la experiencia, o que afirmen un hecho físico verificable por sus consecuencias.

De acuerdo con esta interpretación, se considera que la tendencia general en el siglo XVIII fue querer hacer de la Mecánica una ciencia tan racional como la geometría, es decir una ciencia cuyos enunciados se puedan deducir lógicamente de un reducido número de proposiciones asumidas como axiomas y, consecuentemente, como un esquema teórico-conceptual sin el concurso de la experiencia.

No obstante, si bien es incontestable que esta intención de *racionalización* de la mecánica jugó un papel fundamental en el surgimiento y desarrollo de la mecánica analítica del siglo XVIII, algunas investigaciones históricas han mostrado que la actividad de quienes participaron en este proceso no puede considerarse como limitada a hacer de la mecánica una teoría lógico-deductiva<sup>1</sup>. Paralelo a este proyecto de racionalización, los así llamados “geómetras” del siglo XVIII tuvieron también fuertes preocupaciones epistemológicas, relativas tanto a la organización de la experiencia sensible como al grado de validez y certeza de nuestro conocimiento, característicos del pensamiento científico, en particular físico.

En este contexto interpretativo, es bien conocida la propuesta adelantada por uno de los “geómetras” representativos de la historia de la mecánica del siglo XVIII, a saber Jean Le Rond d’Alembert. Como se sabe, son objetivos

---

<sup>1</sup> Hankins, T. [1970]; Paty, M. [1977], [2001] & [2004]; Gaukroger, S. [1982]; Harman, P. M. [1993]; Firode, A. [2001].

explícitos del programa d'alembertiano el fundar *en necesidad* los principios de la mecánica, de manera que permitan erigir la teoría del movimiento en una ciencia puramente racional, y reducir sus principios al número más pequeño posible. Es igualmente bien conocido, que tal organización de la ciencia de la mecánica por parte de d'Alembert obedece a una serie de presupuestos filosóficos que hacen imposible plantear una disociación entre el cuadro de contribuciones puramente científicas y técnicas, y el conjunto de presupuestos epistemológicos sobre la validez y la certeza de nuestro conocimiento.

En contraste, no son bien conocidos los aportes de organización y fundamentación de la mecánica adelantadas por la misma época por otro de los principales “geómetras” del siglo XVIII: Leonhard Euler. Euler es muy bien conocido como matemático y como físico-matemático, pero es mal conocido (e incluso muchas veces menospreciado) como físico y como pensador fuertemente comprometido con reflexiones epistemológicas relacionadas con la fundamentación de la mecánica.

Usualmente se afirma que la mayor parte de los trabajos de Euler fueron de carácter técnico –matemático o físico-matemático. Sin embargo, se constata que una parte sustancial del enorme conjunto de sus publicaciones tiene un carácter “metafísico” (en el sentido de reflexión científica) y conciernen principalmente a su pensamiento sobre la constitución de la materia y a su tentativa de reestructuración de los fundamentos de la mecánica.

23

## 2. Tradición cartesiana e inteligibilidad por el análisis

Es en la *Mechanica sive motus scientia anatylice exposita* (1736) donde Euler presenta sus primeras organizaciones de la mecánica, concebida como la ciencia que estudia el movimiento, su generación y su alteración. En esta obra, Euler comienza a materializar su intención general de reorganizar la mecánica a través del uso del “método analítico” y de la correlativa formulación de los principios generales en los que se ha de fundar esta ciencia. De hecho, en el título mismo de la obra se sintetiza su programa: La Mecánica o la ciencia del movimiento expuesta analíticamente.

El denominado “*método analítico*” no es otro que el uso sistemático del simbolismo y significación del cálculo diferencial e integral, que Euler ya bien conocía en esta época a través de sus coterráneos los hermanos Jakob y Johann Bernoulli.

Es importante resaltar que el análisis para Euler, más que un procedimiento algorítmico, es ante todo una *forma de pensar*: un verdadero método heurístico sin el cual no solo no sería posible representar matemáticamente los conceptos y proposiciones de la mecánica, sino que incluso no se llegaría a concebirlas. Ya desde el Prefacio de su tratado Euler señala críticamente

las dificultades que presentan las obras de sus antecesores en este campo de adquirir un conocimiento “claro y distinto”, debido a la ausencia de tal método:

[...] lo que pasa con todos los escritos que han sido compuestos sin análisis pasa sobre todo con aquellos que tratan de la mecánica, a saber que el lector, incluso si está convencido de la verdad de las cosas que ellos enuncian, no llega sin embargo a adquirir un conocimiento suficientemente claro y distinto, de suerte que si se cambia solo un poco las mismas cuestiones, él difícilmente puede resolverlas por sus propias capacidades<sup>2</sup>.

Tal es el caso particular de los *Principia* (1687) de Newton y la *Phoronomia* (1716) de Hermann. Bien que Euler resalta el progreso que estas obras han dado a la ciencia del movimiento, su dificultad, es decir la imposibilidad para el lector de seguir racionalmente el proceso de resolución de los problemas propuestos, radica en que en ellas se trata la mecánica “sintéticamente según el método de los antiguos”, basado exclusivamente en el uso de demostraciones geométricas.

24 Dicha dificultad no podrá ser superada, según Euler, a menos que se desarrollen las mismas proposiciones y problemáticas que abordaran estas obras, con la ayuda de “un método simple y uniforme”<sup>3</sup>, un método que permitiera dar a esta ciencia su carácter de *inteligibilidad*. Es en este contexto justificativo que Euler, apoyado en esta forma analítica de pensar, se propone como intención general hacer de la mecánica una ciencia racional, una ciencia cuyos principios sean absolutamente necesarios, es decir susceptibles de ser establecidas sin el concurso de la experiencia:

Estos principios habiendo sido hasta aquí muy ligeramente establecidos, yo los he demostrado de forma que se comprenda que ellos no sólo son ciertos sino incluso necesariamente verdaderos<sup>4</sup>.

---

<sup>2</sup> Euler, L. [1736]. Prefacio. «... ce qui se passe avec tous les écrits qui ont été composés sans analyse se passe surtout avec ceux qui traitent de la mécanique, à savoir que le lecteur, même s’il est convaincu de la vérité des choses qu’ils énoncent, ne parvient cependant pas à en acquérir une connaissance suffisamment claire et distincte, en sorte que si on change un tant soit peu les mêmes questions, il peut difficilement les résoudre par ses propres capacités.” Todas las citas textuales de esta obra son tomadas de la traducción francesa inédita de Firode, A.

<sup>3</sup> *Ibidem*. “... une méthode simple et uniforme”. Una expresión similar sería utilizada por Lagrange en su *Mécanique Analytique* para caracterizar su método algebraico propuesto: “On ne trouvera point de figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j’y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme”. Lagrange, J. L. [1788].

<sup>4</sup> *Ibidem*. “Ces principes ayant été jusqu’ici trop légèrement établis, je les ai donc démontrés de façon qu’on comprenne qu’ils sont non seulement certains mais encore nécessairement vrais”.

Como es bien conocido, esta misma intención de rendir inteligible la mecánica a través de las matemáticas es propuesta igualmente por d'Alembert. Ya desde el prefacio a su *Traité de Dynamique* (1743), d'Alembert invoca la “certeza de las matemáticas” tanto en lo que se refiere a la simplicidad y abstracción de su objeto de estudio, como por estar fundadas sobre “principios necesariamente verdaderos y evidentes por ellos mismos”. Es por ello que considera que para abordar las otras ciencias a través del mejor método posible, no sólo “es necesario introducir y aplicar tanto como se pueda, conocimientos potentes de las ciencias más abstractas y por consiguiente más simples [el álgebra y la geometría], sino incluso considerar de la manera más abstracta y simple que se pueda, el objeto particular de esta ciencia”<sup>5</sup>.

Es precisamente con este pensamiento guía que d'Alembert se propone el doble objetivo de reducir los principios de la mecánica al más pequeño número y de darles toda la claridad que se les pueda establecer. Esta claridad reclamada no es otra que la justificación racional de tales principios en el sentido de poder deducirlos lógicamente de un reducido número de proposiciones consideradas como evidentes y, por consiguiente, no necesitar en su formulación el recurso a la experiencia.

25

Es precisamente debido a este doble objetivo de reorganizar conceptualmente la ciencia de la mecánica haciendo uso del análisis y de formular sus principios fundadores, que puede afirmarse que los programas euleriano y d'alembertiano de la mecánica están fuertemente influenciados por las tradiciones lebniziana y cartesiana.

### **3. Los conceptos primarios de la mecánica: espacio, tiempo y movimiento**

Tanto para Euler como para d'Alembert, la significación de la ley de la inercia está estrechamente relacionada con su concepción de espacio, tiempo y movimiento como conceptos fundamentales de la mecánica.

Es en la *Mechanica* (1736) que Euler comienza a plantear su concepción a cerca de estos conceptos fundamentales y a hacer explícito su enfoque metodológico para abordar los problemas relativos a su certeza y validez. El capítulo 1 del primer tomo, *De motu in genere*, abre con las definiciones de las nociones básicas de movimiento y lugar como “el transporte de un cuerpo del lugar que ocupaba a otro” y “una parte del espacio inmenso o infinito en

---

<sup>5</sup> D'Alembert, [1736]. Prefacio. “... il est nécessaire d'y introduire & d'y appliquer autant qu'il se peut, des connoissances puisées dans des Sciences plus abstraites, & par conséquent plus simples [la Géométrie et l'Algebre], mais encore d'envisager de la manière la plus abstraite & la plus simple qu'il se puisse, l'objet particulier de cette Science”, p.iv.

el que se encuentre el universo”<sup>6</sup>, respectivamente. Según Euler, “lo propio de los cuerpos es ocupar un lugar”<sup>7</sup> y las ideas de movimiento y reposo no pueden adjudicarse sino a las cosas que ocupan un lugar, es decir, a los cuerpos; de esta manera, “ningún cuerpo puede existir que no sea ni en movimiento ni en reposo”<sup>8</sup>.

Euler retoma, a este respecto, la tradición newtoniana no sólo al concebir el cuerpo como esencialmente diferente del espacio y al adjudicarle, en virtud de esta diferencia, la propiedad de movilidad sino, además, al enfatizar en la distinción entre los conceptos de espacio y movimiento verdaderos y absolutos de los correspondientes conceptos relativos. De hecho, luego de sus dos primeras definiciones, Euler señala la dificultad que tenemos de percibir en la experiencia un tal espacio absoluto y justifica el uso de los conceptos relativos:

Como no podemos formarnos ninguna idea certera de este espacio inmenso y de sus límites de los cuales se hace mención en las definiciones dadas, en lugar de ellos estamos acostumbrados a considerar un espacio finito y límites corporales a partir de los cuales juzgamos el movimiento de los cuerpos y su reposo<sup>9</sup>.

26 Como ya se evidencia a partir de las definiciones y comentarios mencionados, la concepción euleriana de movimiento (absoluto) está estrechamente relacionada con su concepción misma de espacio y de tiempo. Pero, bien que para Euler, de la misma forma que lo fuera para Newton, estos conceptos son considerados como los *contenedores* de los objetos materiales y de los eventos, el papel que ellos desempeñan dentro de la ciencia de la mecánica debe mirarse, ante todo, dentro de la perspectiva característica de todo el siglo XVIII dentro de la cual Euler es un claro exponente: al enfrentar los problemas relativos a la fundamentación del los conceptos primarios de la mecánica, lo que se discute no es ya la *existencia* tales conceptos fundamentales sino su *cognoscibilidad*.

En este sentido, bien que imbuido en la tradición newtoniana, los conceptos mismos de espacio y tiempo y su justificación son, para Euler, mas neutros, por así decirlo, a consideraciones metafísicas, que lo que fueron para Newton. Euler afirma:

---

<sup>6</sup> Euler, L. [1736]. §§1-3. “... le transport d’un corps du lieu qu’il occupait dans un autre” y “... une partie de l’espace immense ou infini dans lequel se tient l’univers”.

<sup>7</sup> *Ibidem.*, §2. Colorario 1 a la definición 1. “... le propre des corps est d’occuper un lieu”.

<sup>8</sup> *Ibidem.*, §3. Colorario 2 a la definición 1. “aucun corps ne peut exister qui ne soit ni en mouvement ni en repos”.

<sup>9</sup> *Ibidem.* Scolie I, §8. “Comme nous ne pouvons nous former aucune idée certaine de cet espace immense et des ses bornes dont ils est fait mention dans les définitions données, au lieu de ceux-ci, nous sommes accoutumés à considérer un espace fini et des limites corporelles à partir desquelles nous jugeons du mouvement des corps et de leur repos”.

[...] No sostenemos que sea dado un espacio infinito de esta clase, que tenga referencias fijas e inmóviles; pero, que exista o que no exista, demandamos que quien considere el movimiento absoluto y el reposo absoluto debe representarse un tal espacio y juzgar por su medio el estado de los cuerpos, sea de reposo o de movimiento<sup>10</sup>.

De esta forma, la certeza que debe asignársele a los conceptos absolutos de espacio y tiempo no radica en postularlos, en razón de su pertinencia metafísica u ontológica, como verdades inmanentes e identificarlos, a partir de ello, con un sustrato substancial independiente tanto de los objetos materiales como de los sujetos cognoscentes. Por el contrario, la concepción de espacio absoluto -y de tiempo absoluto- para Euler se establece en función de un *criterio metodológico*: nuestras significaciones de estos conceptos deben ser tales que sean precisamente las “apropiadas a las leyes del movimiento”. Así, estos conceptos se constituyen, como bien lo menciona Cassirer, en el *postulado de una representación*<sup>11</sup> : una representación que debe necesariamente hacerse quien quiera juzgar el movimiento y reposo absolutos y, por consecuencia, quien quiera considerar la ley de la inercia como válida.

Una crítica similar a los conceptos de espacio y tiempo absolutos como entes con existencia por sí mismos, sería planteada algunos años más tarde por d'Alembert. Bien que la intención al plantear tal crítica y los fundamentos en los que se basa es diferente a la que tuviera Euler, la forma de resolver esta problemática por parte de los dos autores presenta notables semejanzas. En efecto, retomando igualmente la distinción newtoniana entre cuerpo y espacio, d'Alembert no solo distingue los cuerpos de la extensión que ellos ocupan sino que considera que tal distinción es precisamente la que permite comprender el movimiento mismo. En su *Traité de Dynamique* (1743), él afirma que:

[...] para tener una idea de Movimiento, se no puede dispensar (evitar, eludir) de distinguir al menos por el espíritu de dos clases de extensión: una, que sea observada como impenetrable y que constituye aquello que se llama propiamente los Cuerpos; la otra, que siendo considerada simplemente como extensión, sin examinar si ella es penetrable o no, sea la medida de la distancia de un cuerpo a otro y cuyas partes, consideradas como fijas e inmóviles, puedan servir para juzgar el reposo o el movimiento de los cuerpos<sup>12</sup>.

---

<sup>10</sup> Euler, L. [1736]. Escolio II, § 9. “[...] nous ne soutenons pas qu’est donné un espace infini de cette sorte, qui aurait des repères fixes et immobiles ; mais, qu’il existe ou qu’il n’existe pas, nous demandons que celui qui considérera le mouvement absolu et le repos absolu, se représente un tel espace et juge par son moyen de l’état des corps, soit de repos soit de mouvement”.

<sup>11</sup> Cassirer, E. [1927].

<sup>12</sup> D'Alembert, J. le R. [1743], p. vi. “pour avoir une idée claire du Mouvement, on ne peut se dispenser de distinguer au moins par l’esprit deux sortes d’étendue: l’une, qui soit regardée comme impenétrable, & que constitue ce qu’on appelle proprement les Corps; l’autre, qui

Así, de forma análoga a como Euler lo propusiera, d'Alembert justifica su concepción de espacio en función de un criterio metodológico<sup>13</sup> : con la intención de tener una representación clara del movimiento, es la noción de espacio la que debe adaptarse a este requerimiento. Sin embargo, debido a su programa “antimetafísico” por el cual la ciencia de la mecánica debe referirse en última instancia a la “consideración del sólo movimiento”, d'Alembert rechaza toda idea de espacio y de tiempo como entes con existencia propia antes de toda materia, para concebirlas como *verdades de evidencia*, es decir como ideas simples y evidentes que no tienen necesidad de ser definidas y respecto a las cuales no hay ningún referente substancial u ontológico. Según d'Alembert, el conocimiento del movimiento requiere la intervención de una abstracción del espíritu para identificar las “ideas simples” contenidas en la “idea compuesta” de movimiento; el espacio y el tiempo son precisamente tales ideas simples que el espíritu abstrae a partir de la experiencia<sup>14</sup>.

28 Para Euler, al contrario, los conceptos de espacio y tiempo absolutos no pueden ser considerados como meras abstracciones que nuestro pensamiento realiza a partir de la experiencia sensible; la certeza de estos conceptos debe, más bien, buscarse en un *criterio lógico* que les asegure su validez incondicional como fundamentos de la ciencia de la mecánica. Es precisamente al interior de esta intención de fundamentación de los conceptos de espacio y tiempo que debe comprenderse el papel desempeñado por el principio de inercia en la concepción euleriana, tal y como él mismo lo explicitaría en su memoria *Reflexions sur l'espace et le temps* (1748).

El estilo de argumentación de dicha memoria es similar al propuesto en la *Mechanica* (1736), pero mucho más explícito: tomando como fundamento la incuestionable validez del principio de inercia, Euler se propone establecer la naturaleza del espacio y del tiempo absolutos como *condiciones de posibilidad* de tal principio. Teniendo este objetivo en mente, contrario a imponer definiciones predeterminadas de los términos “espacio” y “tiempo”, Euler propone que las concepciones que debemos de tener de dichos conceptos deben ser tales que no entren en contradicción con los principios reconocidos de la mecánica.

---

étant considérée simplement comme étendue, sans examiner si elle est pénétrable ou non, soit la mesure de la distance d'un Corps à un autre, & dont les parties envisagées comme fixes & immobiles, puissent servir à juger du repos ou de Mouvement des Corps”.

<sup>13</sup> Este criterio metodológico sería manifiesto por d'Alembert recurrentemente; ver a este respecto d'Alembert, J. le R. [1751] & [1767].

<sup>14</sup> Para un análisis más detallado de la concepción del espacio y el tiempo en d'Alembert ver Paty, M. [1977] et Firode, A. [2001].



Es precisamente esta “incontestable validez” del principio de inercia la que lo llevaría a adoptar en esta memoria una concepción más “realista” de los conceptos de espacio y tiempo, que la que presentara en la *Mechanica* (1736). De acuerdo esta concepción, si se quiere que este principio no pierda su carácter de validez, el espacio y el tiempo absolutos no deben ser asumidos como meras ideas abstractas construidas por nuestro espíritu, sino que se les debe atribuir alguna existencia *real*, cualquiera que ella sea, y se les debe dotar de una naturaleza tal que no contradiga dicho requerimiento, puesto que “sería absurdo sostener que puras imaginaciones puedan servir de fundamento de los principios reales de la Mecánica”<sup>15</sup>.

Euler propone, de esta forma, una solución *positiva* al problema de la naturaleza del espacio y del tiempo: estos conceptos encierran una realidad innegable, no porque así lo acrediten nuestras sensaciones, ni porque lo imponga como un enunciado *a priori* nuestro espíritu; su realidad se establece porque son indispensables para la nuestra representación científica (matemática) del mundo.

Es precisamente en este sentido que Cassirer afirma que, según Euler, el contenido objetivo de los conceptos fundamentales de la mecánica debe determinarse exclusivamente atendiendo a la *función* que cumplen dentro del sistema de la física matemática<sup>16</sup>. Los principios de la mecánica (el principio de inercia y los principios que reglan del movimiento) se han de constituir en las premisas necesarias de toda explicación científica de los fenómenos, de tal suerte que si nuestros conceptos psicológicos o metafísicos son demasiado estrechos para encuadrar el contenido que la ciencia física nos ofrece, la culpa de ello deberá atribuirse a estos conceptos mismos. En tal caso, todo el esfuerzo tendrá que dirigirse a corregir y transformar tales conceptos en la medida necesaria para que puedan cumplir plenamente la función a la que se destinan y en gracia a la cual existen.

#### **4. El principio de proporcionalidad entre la fuerza y el elemento de velocidad**

En la *Mechanica* (1736), Euler se refiere a la fuerza con el término *potencia* [*potentia*] y la define en relación al cambio de movimiento que ella produce sobre el cuerpo, siendo su acción a lo largo de una dirección definida en cada instante<sup>17</sup>.

<sup>15</sup> *Ibidem.*, §5. “... serait absurde de soutenir, que des pures imaginations pouvaient servir de fondement à des principes réels de la Mécanique”.

<sup>16</sup> Ver Cassirer, E. [1907], pp. 404 y ss.

<sup>17</sup> Euler, L. [1736], §§ 99 y 103.

A pesar de los nexos con la forma que Newton define su concepto de *fuerza impresa*, para tener una visión más justa del enfoque euleriano es necesario tener presente más ampliamente el contexto teórico alrededor del cual su concepto de fuerza adquiere significado.

De una parte, la dinámica euleriana está fundada sobre la estática en el sentido que retoma el concepto de fuerza estática y lo extiende a la mecánica como concepto estructurador. Con esta intención, retoma el principio de composición de fuerzas, que se fundamenta en la idea de equivalencia estática de las fuerzas, y lo extiende al caso de la mecánica haciendo equivalente el *efecto* que dichas potencias pudieran generar en un *instante posterior* a su aplicación si actuaran independientemente<sup>18</sup>. Adicionalmente, dado que las potencias en mecánica cambian de dirección y magnitud en cada instante, para realizar una tal comparación se debe determinar para cada instante la potencia equivalente a las potencias que solicitan el cuerpo y, para ello, “no tiene sino que suponerse que aquel es afectado por la misma potencia por más tiempo que durante un elemento de tiempo infinitamente pequeño”<sup>19</sup>.

De esta forma, retomando el principio de composición de fuerzas bajo la significación del efecto que dichas fuerzas producirían en un instante dado, y extendiendo su aplicación a cada instante del movimiento del cuerpo, Euler trata de explicitar y formalizar el modo de acción de una fuerza durante un elemento diferencial de tiempo  $dt$ , formalización que lo conduciría a la enunciación de su principio general del movimiento.

Esta significación del principio de composición de fuerzas en términos del efecto que tales fuerzas producen actuando en el mismo instante sobre un cuerpo, sería igualmente retomado por d’Alembert en su *Traité* (1743) como fundamento de su mecánica<sup>20</sup>. No obstante, las intenciones de su enunciación son bien diferentes para los dos autores. Para Euler, este principio es aplicable en cada instante del movimiento, caso en el que debe considerarse que la fuerza actúa continuamente durante todo el movimiento, permitiendo por ello constituir una explicación de la generación del movimiento en términos del modo de acción de las fuerzas en el tiempo; d’Alembert, al contrario, critica explícitamente las perspectivas que consideran al movimiento como debido a la acción continua de una fuerza motriz, y trata de construir una demostración independiente de toda suposición del modo de producción del movimiento.

<sup>18</sup> *Ibidem*. §107.

<sup>19</sup> *Ibidem*. §110. “...il ne faut pas supposer que celui-ci est affecté par la même puissance plus longtemps que durant un élément de temps infiniment petit”.

<sup>20</sup> D’Alembert, J. Le R. [1743]. *Chapitre II, du mouvement composé*, §§21 y ss. Para un análisis al respecto ver Paty, M. [1970].

Complementariamente, considerando que el efecto de una potencia absoluta sobre una partícula es el mismo si ella se encuentra en reposo o movimiento, Euler propone que el efecto de una potencia actuando sobre una partícula en movimiento es doble: cambio de velocidad y cambio de dirección. Además, la acción de una potencia es tal los incrementos de velocidad son proporcionales a los tiempos en los que ellos se producen, es decir, “el incremento de velocidad durante el tiempo  $dt$  es al incremento de velocidad adquirido durante el tiempo  $d\hat{o}$   $[d\hat{o} = ndt]$  como  $dt$  a  $d\hat{o}$ ”<sup>21</sup>.

Estos análisis, junto con la consideración que los elementos de espacios recorridos en virtud del incremento de velocidad producido por una potencia, en un tiempo  $dt$ , son como la potencia, conducen a Euler a proponer su conocido enunciado: siendo  $dc$  el incremento de velocidad experimentado por una partícula durante el tiempo  $dt$ , por la acción de una potencia  $p$ , “este incremento de velocidad será, para un tiempo y potencias cualesquiera, como  $pdt$ , es decir, como la potencia multiplicada por el tiempo”<sup>22</sup>. Según Euler, este enunciado no es solamente verdadero “sino también es necesariamente verdadero, de modo que implicaría contradicción colocar  $dc = p^2dt$  o  $p^3dt$  o alguna otra función de  $p$  en lugar de  $p$ ”<sup>23</sup>.

Esta ecuación es para Euler la expresión analítica del efecto producido por una potencia cualquiera sobre una partícula cualquiera y contiene el fundamento de la expresión que años más tarde erigiría como “el principio general y fundamental de toda la mecánica”.

El concepto de fuerza como causa externa a los cuerpos que genera en ellos cambios en el estado de movimiento fue muy criticado en la primera mitad del siglo XVIII, siendo d’Alembert uno de los principales gestores y exponentes de tal crítica en el continente.

Según su proyecto de constituir la mecánica en una ciencia cuyo primer y principal objeto fuese el estudio del movimiento y sus propiedades generales, d’Alembert rechazó el carácter operacional o la utilidad de la noción de *fuerza externa*, al considerarlo como un “axioma vago y oscuro” y, por tanto, inútil en el intento de hacer de la mecánica una ciencia fundamentada en nociones claras y evidentes por sí mismas. Dado que a principio del siglo XVIII la significación usual de este concepto estaba directamente relacionada con el principio por el cual se establece la proporcionalidad entre la fuerza aceleratriz y el elemento diferencial de velocidad, el rechazo de este concepto

<sup>21</sup> Euler, L. [1736], §130. “L’increment de vitesse durant le temps  $dt$  est à l’incrément de vitesse acquis durant le temps  $d\hat{o}$   $[d\hat{o} = ndt]$  comme  $dt$  à  $d\hat{o}$ ”.

<sup>22</sup> *Ibidem.*, §150.

<sup>23</sup> *Ibidem.*, §152. “mais aussi qu’il est nécessairement vrai, de sorte que cela impliquerait contradiction de poser  $dc = p^2dt$  ou  $p^3dt$  ou tout autre fonction de  $p$  au lieu de  $p$ ”.

es justificado por la vía del rechazo a dicho principio. Así, en su *Traité de Dynamique* (1743) d'Alembert no sólo pone en duda las pruebas dadas a favor de este principio sino que explicita su intención de ser expulsarlo de la ciencia de la mecánica:

No examinaremos si este principio es de verdad necesaria; afirmamos solamente que las pruebas que de ello se han dado hasta aquí no nos parecen convincentes; no lo asumiremos tampoco, con ciertos geómetras, como verdad puramente contingente, lo que arruinaría la certeza de la Mecánica y la reduciría a no ser más que una ciencia experimental: nos contentaremos con observar que cierto o dudoso, claro u oscuro, es inútil a la Mecánica y, por consiguiente, debe ser expulsado de ella<sup>24</sup>.

No obstante, esto no significa que d'Alembert no admitiera la noción de causa externa *a priori*. De hecho, en virtud del principio de inercia, él considera que “el movimiento uniforme de un cuerpo no puede ser alterado sino por una causa externa”<sup>25</sup>. Sin embargo, de tales causas o fuerzas las únicas cuyos efectos se está en posibilidad de determinar por su conocimiento directo son las fuerzas de impulso (choque); las otras se conocen únicamente por la constatación de los efectos que ellas produce sobre los cuerpos, es decir a través de los cambios de estado de movimiento (aceleraciones) y, por tanto, han de identificarse con ellos.

Así, lo que d'Alembert rechazó fue, mas bien, la consideración de la fuerza motriz como concepto *claro y distinto* y, consecuentemente, posible de ser considerado como fundamento de la mecánica. En este orden de ideas, el término fuerza no designa para d'Alembert, a diferencia de lo que fuera para Newton y Euler, una realidad externa cuya acción sobre los cuerpos ocasiona determinados efectos físicos observables. Este término no tiene sentido sino cuando se lo relaciona con los efectos en sí mismos, efectos que son descritos en términos de las magnitudes cinemáticas que caracterizan el movimiento.

Las magnitudes cinemáticas, a partir de las cuales es posible dar cuenta de los efectos del movimiento, son definidas por d'Alembert en su *Traité* a partir de la representación geométrica del movimiento en términos de una curva cuyas abscisas representan el tiempo gastado *t*, y las ordenadas del

---

<sup>24</sup> D'Alembert, J. le R. [1743], Prefacio, p. xi. “Nous n'examinerons point si ce principe est de vérité nécessaire; nous avouerons seulement que les preuves qu'on en a données jusqu'ici, ne nous paraissent pas fort convaincantes; nous n'adopterons pas non plus, avec quelques géomètres, comme de vérité purement contingente, ce qui ruineront la certitude de la Mécanique, & la réduirait à n'être plus qu'une science expérimentale: nous nous contenterons d'observer, que vrai ou douteux, clair ou obscur, il est inutile à la Mécanique, & que par conséquent il doit en être banni”.

<sup>25</sup> *Ibidem*.

espacio recorrido  $e^{26}$ . Apoyándose exclusivamente en este diagrama, d'Alembert se esfuerza en demostrar que la curva  $e = e(t)$ , que representa un movimiento acelerado o retardado cualquiera, es necesariamente solución de una ecuación de la forma  $\phi dt^2 = \pm dde$ , donde  $\phi$  designa simplemente una función que relaciona el elemento diferencial de segundo orden del espacio ( $dde$ ) y el cuadrado del elemento del tiempo ( $dt^2$ ).

D'Alembert, entonces, conceptualiza la aceleración  $\phi$  a partir de la relación existente entre el elemento diferencial de segundo orden del espacio ( $dde$ ) y el cuadrado del elemento del tiempo ( $dt^2$ ), puesto en evidencia en la ecuación diferencial de la curva  $e = e(t)$ , y establece a partir de ello una expresión analítica que da cuenta del movimiento y sus cambios sin volver objeto de análisis la causa de variación de tal movimiento. Esta expresión le permite definir, a su vez, la aceleración o *fuerza aceleratriz* como  $\phi = du/dt = dde/dt^2$ , y la *fuerza motriz* como  $m\phi = mdu/dt = mdde/dt^2$ , siendo  $m$  la masa del cuerpo<sup>27</sup>.

De esta manera, la formula  $\phi dt = du$  ( $du$  siendo el elemento diferencial de la velocidad) es para d'Alembert, al igual que lo fuera para Euler, una relación que sintetiza la representación analítica del cambio de movimiento. No obstante, es justificada y significada por los dos autores de forma bien diferente.

Notemos, en primer lugar, que Euler considera que esta relación expresa la naturaleza causal de la fuerza, en el sentido que representa analíticamente el modo de acción de las fuerzas en el tiempo; d'Alembert, por su parte, no ve en dicha relación más que una simple definición nominal del concepto de fuerza aceleratriz y por lo tanto libre de toda significación sobre el estatus antológico de su modalidad. En segundo lugar, si bien d'Alembert comparte con Euler la idea que las leyes de la mecánica han de ser verdades necesarias, rechaza la concepción según la cual la proporcionalidad entre variación de velocidad y su causa sea erigida como principio; según él cuando la causa del cambio de movimiento es desconocida, es decir en aquellos casos distintos a las colisiones entre los cuerpos,  $\phi$  en la expresión  $\phi dt = du$  debe ser siempre dada o por la experiencia o por hipótesis y, por tanto, lo que se denomina *fuerza aceleratriz*, a diferencia de quienes ven en ella un principio, no es más que una definición<sup>28</sup>.

<sup>26</sup> *Ibidem*. Primera parte, capítulo primero *Du mouvement accéléré ou retardé*, §§14-20.

<sup>27</sup> Es precisamente por esta identificación efectiva y simultánea de la causa con el efecto que ella produce que, según Paty, subyace a la concepción d'alembertiana una *causalidad en sentido puramente físico*, puesta en evidencia en la significación de la ecuación diferencial  $\ddot{e}dt^2 = \pm dde$ . Ver a este respecto Paty, M. [2004].

<sup>28</sup> D'Alembert, J. le R. [1743].

Por el contrario, en su memoria titulada *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* (1752) Euler enuncia este principio en toda su generalidad. Allí, la expresión  $2Mddx = \pm Pdt^2$  es erigida por Euler como el “principio fundamental de la Mecánica” en la medida en que expresa el comportamiento mecánico de los *elementos infinitesimales* que se considera está constituido todo cuerpo, y sintetiza la relación existente entre la magnitud y dirección de cualquier fuerza externa con su efecto producido sobre el elemento en consideración. Esta expresión es explicada por Euler al referirla a un sistema de coordenadas rectangulares fijas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) respecto al cual toda fuerza puede ser descompuesta. De esta forma, Euler obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales: I.  $2Mddx = Pdt^2$ , II.  $2Mddy = Qdt^2$ , III.  $2Mddz = Rdt^2$ , donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son las componentes de la fuerza siguiendo las direcciones  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , respectivamente<sup>29</sup>. Según Euler, el conjunto de estas ecuaciones diferenciales se constituyen en los *axiomas* a partir de los cuales se pueden deducir los diferentes principios de la mecánica<sup>30</sup>.

34 El intento de construcción de un modelo físico explicativo de la forma como ocurre una interacción, sería complementado por Euler en su memoria *Recherches sur l'origine des forces* (1750), donde propone que es en la propiedad de la *impenetrabilidad* de los cuerpos donde reside el origen de todas las fuerzas de la naturaleza.

Resaltemos que, retomando la tradición newtoniana, la impenetrabilidad es tanto para D'Alembert como para Euler una propiedad esencial de la materia que implica una concepción de espacio como diferente de cuerpo y, por tanto, una propiedad de carácter *físico*. No obstante, la importancia y el estatus que Euler asigna a este concepto no se corresponden a la significación que d'Alembert le atribuyera. Para D'Alembert, la impenetrabilidad es una propiedad fundamental al punto de considerarla, junto con capacidad de atracción, como el origen de los cambios de movimiento percibidos en los cuerpos<sup>31</sup>. Por el contrario, la impenetrabilidad para Euler no solo es una propiedad esencial, sino también un concepto fundamental en la constitución de un modelo explicativo para el origen de los cambios de movimiento que experimentan los cuerpos<sup>32</sup>.

Las diferencias entre sus concepciones residen también en el hecho que Euler la asume como una propiedad absolutamente *primitiva*. En efecto, mientras que la impenetrabilidad es para d'Alembert, al igual que la extensión o la atracción, una propiedad de los cuerpos que nos es conocida por la

<sup>29</sup> Euler, L. [1752], §22.

<sup>30</sup> *Ibidem.*, §18.

<sup>31</sup> D'Alembert, J. le R. [1743], p. x.

<sup>32</sup> Ver a este respecto Gaukroger, S. [1982] et Romero, A. [2007].

experiencia, para Euler se trata de una propiedad tanto *auto-evidente* como *necesaria*: es una propiedad de la materia que no es inferida de la experiencia sino que es previa a ésta y, de esta forma, a partir de la cual nos es posible el conocimiento de la existencia de la materia<sup>33</sup>.

Es precisamente esta concepción de la impenetrabilidad como concepto auto-evidente y necesario la que permite considerar la perspectiva euleriana como fuertemente influenciada por la metodología cartesiana, cuyo propósito principal era construir una mecánica basada en fundamentos auto-evidentes y necesarios y cuyos conceptos básicos residieran en la esencia de los cuerpos. Adicionalmente, dado que según Euler todos los cambios de estado de movimiento que experimentan los cuerpos tienen su origen en la impenetrabilidad y que, por consiguiente, esta propiedad de la materia es la única fuente de todas las fuerzas del mundo, las diversas interacciones entre los cuerpos son necesariamente *interacciones por contacto*. Es precisamente por esta razón que conduce a Euler a rechazar la concepción newtoniana de acción a distancia y a considerar, de la misma forma que lo fuera para Descartes, al impacto como el modelo de acción de todas las fuerzas de la naturaleza.

## 5. El establecimiento de los principios generales

A pesar de esforzarse en justificar su pertinencia, para Euler el principio de proporcionalidad entre la fuerza motriz y el elemento diferencial de velocidad tiene una validez restringida. Este principio no concierne sino a los cuerpos infinitamente pequeños o a los que se pueden considerar como tales, es decir aquellos que despreciando el movimiento relativo de sus partes pueden asumirse como concentrados en su centro de gravedad. Pero cuando se desea dar cuenta del movimiento de sistemas de cuerpos finitos, estos principios no son ya de ninguna utilidad. Según Euler, esta insuficiencia no debe ser imputada al cálculo o al análisis sino a la falta de principios adecuados para el análisis de los movimientos compuestos que experimentan tales sistemas de cuerpos y, por consiguiente, nuevos principios deben ser propuestos.

En su memoria *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan* (1745) Euler afirma la necesidad de probar la insuficiencia de los principios de la mecánica hasta entonces conocidos para la resolución de problemas relativos al movimiento de cuerpos rígidos y considera la necesidad de “ir más lejos y descubrir principios que, fortificados con el Análisis, puedan conducirnos a una solución completa”<sup>34</sup>. En esta memoria Euler analiza el

<sup>33</sup> Euler, L. [1752], §15, p.114.

<sup>34</sup> Euler, L. [1745], §3. “... le besoin où l’on est d’aller plus loin, & d’en découvrir de nouveaux qui, fortifiés de l’Analyse, puissent nous conduire à une solution complete”.

caso de la rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo que pasa por su centro de gravedad cuando es actuado por fuerzas cualesquiera. Considerando la independencia de los movimientos de translación y rotación, él obtiene lo que hoy denominamos el principio de momento angular  $\tau = I\alpha$ , siendo  $\tau$  el momento de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo ( $\sum F_i r_i$ ),  $I$  el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación ( $\sum m_i r_i^2$ ) y  $\alpha$  la aceleración angular, o *force de rotation* en términos de Euler<sup>35</sup>. El principio para el caso general en el que el eje de rotación varía en el tiempo no sería obtenido sino en su memoria *Découvert d'un nouveau principe de mécanique* (1750), donde Euler encuentra las ecuaciones diferenciales generales de la dinámica del cuerpo rígido (conocidas como ecuaciones de Euler)<sup>36</sup>.

Necesidad del establecimiento de nuevos principios y métodos para determinar el movimiento de sistemas más complejos que aquellos por los que se considera los cuerpos como puntos materiales estaba, en la primera mitad del siglo XVIII, al orden del día.

36 Maupertuis ya había planteado en 1740, la necesidad de contrastar los principios newtonianos con otra clase de principios “menos simples y frecuentemente difíciles de encontrar”<sup>37</sup>, dentro de los cuales invoca el principio de máximo descenso del centro de gravedad y el de conservación de fuerzas vivas. Dentro de esta clase de principios se encuentra también su *ley del reposo*. Esta ley expresa que para que un sistema de cuerpos de masa  $m_i$ , actuado por fuerzas centrales  $V_i, V_i', V_i'', \dots$  tales que son funciones especiales de la distancia a los respectivos centros  $z_i$ , permanezca en equilibrio se requiere que “la suma de los productos de cada masa, por la intensidad de su fuerza y por la potencia  $n+1$  de su distancia al centro de fuerza [...] sea un *máximo* o un *mínimo*”<sup>38</sup>; proposición equivalente a afirmar que  $\sum m_i (V_i z_i + V_i' z_i' + V_i'' z_i'' + \dots) = 0$ .

D'Alembert no niega que la expresión de proporcionalidad entre la fuerza aceleratriz y el elemento de velocidad sea de gran importancia, pues sintetiza el uso del análisis a la dinámica en el sentido que a través de ella los problemas de la mecánica son tales que “la dificultad no es sino de cálculo”<sup>39</sup>. No obstante, de la misma forma que lo hiciera Euler, es explícito en afirmar que su uso está restringido al caso que “el cuerpo sea observado como un

<sup>35</sup> Euler presentó este principio también en su obra *Scientia Navalis* (1741).

<sup>36</sup> Euler, L. [1752], §18.

<sup>37</sup> Maupertuis, P-L. M. [1740]. “... moins simples... et souvent difficiles à trouver”.

<sup>38</sup> *Ibidem*. “... la somme des produits de chaque masse, par l'intensité de sa force, et par la puissance  $n+1$  de sa distance au centre de sa force [...] fasse un *Maximum* ou un *Minimum*”.

<sup>39</sup> D'Alembert, J. le R. [1743], p.20.



punto”<sup>40</sup>. Además, debido a su concepción de fuerza aceleratriz, considera que su uso en dichos casos está limitado al conocimiento de la forma de acción de la fuerza y una tal expresión no es suficiente para determinar el movimiento de los cuerpos y nuevos métodos y principios deben ser propuestos.

Señalando que la mayor parte de las soluciones que se han dado a este difícil problema se han apoyado en principios “que nadie ha demostrado aún de manera general”<sup>41</sup>, él manifiesta en su *Traité* (1743) la posibilidad de alcanzar dicho objetivo a través de un “método muy simple y muy directo”<sup>42</sup> basado exclusivamente en la combinación de los principios de equilibrio y de composición de movimientos. Tal método no es otro que su principio general de la dinámica.

Como se sabe, tal principio se basa en la consideración que en un sistema de cuerpos interactuantes los movimientos iniciales que posee cada cuerpo, independientemente de sus relaciones con los otros, pueden ser considerados como compuestos de otros dos movimientos: el movimiento resultante que los cuerpos adquirirían por su interacción mutua (fuerzas aceleratrices) – que son los movimientos a determinar– y el movimiento perdido o ganado debido a tal interacción (fuerzas de inercia). Teniendo en cuenta esto, el principio de d’Alembert establece que para todo sistema de cuerpos que interactúan de una manera cualquiera los mencionados movimientos componentes son tales que se neutralizarían o en cada instante, el conjunto de fuerzas aceleratrices que actúan realmente sobre el sistema y las fuerzas de inercia son tales que serían capaces de mantener el sistema en equilibrio en el estado mismo que el presenta en ese instante.

De acuerdo con este principio, *todo* fenómeno dinámico puede ser considerado como un fenómeno de equilibrio. Además, dado que es obtenido a partir de sus tres leyes generales (el principio de inercia, el principio de composición de fuerzas y el principio del equilibrio), justificadas a su vez racionalmente por la consideración del movimiento solo, este principio condensa todo su programa de reducir los principios de la mecánica al más pequeño número y de rendirlos inteligibles. En este sentido, en su artículo *Dynamique*, d’Alembert afirmaría que:

Yo creo poder asegurar que no hay ningún problema *dinámico* que no se resuelva fácilmente y casi divirtiéndose, por medio de este principio, o al menos que se reduzca fácilmente en ecuación; pues es ésto todo lo que se puede exigir de la *Dinámica*, y la resolución o integración de la ecuación es luego un aspecto de

<sup>40</sup> *Ibidem*.

<sup>41</sup> D’Alembert, J. le R. [1743], p.xxiv.

<sup>42</sup> *Ibidem*. “... une méthode fort simple & fort direct”.

puro análisis. [...] Me parece que este principio reduce en efecto todos los problemas del movimiento de los cuerpos a la consideración más simple, aquella del equilibrio<sup>43</sup>.

Euler, por su parte, en el primer apéndice de su obra *Methodus Inveniendi* (1744), *De curvis elasticis*, discute la existencia de dos métodos, igualmente fructíferos, para dar cuenta de los efectos percibidos en el universo: el método de las *causas efectivas* (o eficientes), llamado también método directo, y el método de las *causas finales* o método indirecto. El primero de estos métodos suministrara la solución de los problemas mecánicos determinando los efectos a partir sus causas efectivas, a través de la utilización del “principio fundamental de la mecánica”. Por otra parte, cuando se busca analizar los efectos según sus finalidades, se puede siempre conjeturar *a priori* que todo fenómeno natural presenta un máximo o un mínimo y deducir, a partir de ello, el efecto correspondiente. Contrariamente a considerarlos como métodos contrapuestos, ellos son complementarios:

Si las causas finales nos son demasiado ocultas, mientras que las causas efectivas nos son más fácilmente accesibles, el problema es más fácilmente resuelto por el método indirecto; por el contrario, el método directo es empleado si es posible determinar el efecto de las causas efectivas. Pero es necesario percatarse que ambas formas de acercarse de solución del problema permanecen abiertas; de esta manera, no solo una solución es reforzada por la otra, sino, más que eso, del acuerdo entre las dos soluciones aseguramos el más alto grado de satisfacción<sup>44</sup>.

No obstante la incuestionable influencia de Maupertuis<sup>45</sup>, la propuesta metodológica de Euler es novedosa en el sentido que puede interpretarse como una demanda de *proliferación teórica*: la certeza de los conceptos y principios físicos nacientes debe fundamentarse en la concordancia de las deducciones que podamos desprender de ellos con las deducciones de los conceptos y principios que, por consenso, ya se han aceptado<sup>46</sup>.

---

<sup>43</sup> D'Alembert, J. le R. [1751-1780]. Art. *Dynamique*. “Je crois pouvoir assûrer qu'il n'y a aucun problème *dynamique*, qu'on ne résolve facilement & presque en se joûant, au moyen de ce principe, ou du moins qu'on ne réduise facilement en équation ; car c'est là tout ce qu'on peut exiger de la *Dynamique*, & la résolution ou l'intégration de l'équation est ensuite une affaire de pure analyse. [...] Il me semble que ce principe réduit en effet tous les problèmes du mouvement des corps à la considération la plus simple, à celle de l'équilibre”.

<sup>44</sup> *Ibidem*.

<sup>45</sup> Esta oposición entre dos métodos diferentes pero concordantes en cuanto a los resultados que ellos proporcionan ya había sido señalada por Maupertuis en su memoria *Loi du repos des corps* (1740). Ver a este respecto Panza, M. [1995].

<sup>46</sup> Esta misma concepción es puesta en obra por Euler para fundamentar la existencia de espacio y tiempo absoluto en su memoria *Reflexions sur l'espace et le temps* [1748].

Euler resalta que a pesar de los numerosos casos de problemas físicos resueltos por la utilización de ambos métodos, el objetivo del método indirecto de encontrar, para cada tipo de problema dado, la *cantidad* que ha de tomarse como un extremal resulta ser muy difícil de determinar unívocamente dado que es “un problema que parece pertenecer mas a la ciencia natural (metafísica) que a las matemáticas”<sup>47</sup>. No obstante, esta dificultad puede superarse si se presta especial atención a la solución de los problemas mecánicos a través del método directo, pues a través del balance de tales soluciones se podrá determinar, en todos los casos, la expresión general que ha de satisfacer tal condición de máximo o mínimo.

Así, Euler afirma la existencia de una “causa final” actuando en el mundo, la cual no puede ser caracterizada más que de una manera formal: el movimiento de los cuerpos o sistemas es tal que respondería siempre al fin de rendir máximo o mínimo una cierta expresión que, en principio, puede ser siempre representada algebraicamente.

Teniendo como guía estas ideas, Euler considera que el hecho que un cuerpo siga una trayectoria más que alguna otra cuando es solicitado por fuerzas, depende de la correspondencia de dicha trayectoria con una ley de máximos o mínimos, y el problema planteado es, entonces, establecer esta ley determinando la expresión matemática asociada a la trayectoria que correspondería a un máximo o un mínimo. Así, si  $M$  denota la masa del cuerpo y  $v (=vh)$ <sup>48</sup> la velocidad que el cuerpo tendría mientras que recorre el elemento diferencial de espacio  $ds$ , Euler afirma que la trayectoria seguida por el cuerpo será de una forma tal que “entre todas las líneas que tienen los mismos extremos, la expresión  $\int Mdsvh$ , o dado que  $M$  es constante, la expresión  $\int dsvh$  sea un mínimo”<sup>49</sup>. Esta expresión puede también traducirse en relación con las *fuerzas vivas* a  $\int Mv^2 dt = Min$ <sup>50</sup>.

Una vez enunciado de esta forma su principio, Euler procede a justificarlo. Para tal efecto, pone en juego su principio en el análisis algunos casos particulares tales como el movimiento de un cuerpo en ausencia de fuerzas,

<sup>47</sup> *Ibidem*.

<sup>48</sup> He cambiado la notación  $vv$ , utilizada originalmente por Euler para expresar la velocidad, por la notación más moderna  $vh = v$ . No se trata aquí de “une faute d’impression” que escapo a Euler en la corrección de sus pruebas, tal como lo dice Brunet [1938], ni una “inquietante incossistencia” (bothersome inconsistency) en la manera de definir la velocidad por parte de Euler, tal como lo afirma Goldstine [1980]; más bien, Euler hace uso aquí de la identidad propuesta en la *Mechanica* [1736],  $vv = c$ , para definir la velocidad instantánea  $c$  de un cuerpo en un momento dado, en términos de la velocidad que tal cuerpo adquiriría si, al dejarse caer libremente, recorriera una distancia  $v$ .

<sup>49</sup> *Ibidem*. “... parmi toutes les lignes ayant mêmes extrémités, l’expression  $\int Mdsvh$ , ou puisque  $M$  est constant, l’expression  $\int dsvh$  soit un *minimum*”.

<sup>50</sup> *Ibidem*.

el movimiento de un cuerpo proyectado en el vacío y actuado por una fuerza y el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza central. Como ya se ha mencionado anteriormente, su procedimiento es partir de la variación de la expresión propuesta igualada a cero,  $d\int v ds = 0$ , y deducir de ella las mismas soluciones ya conocidas haciendo uso del denominado método directo.

Para ilustrar su modo de proceder consideremos el primer caso. Euler señala que, en virtud del principio de inercia, en ausencia de fuerzas una partícula debe moverse con velocidad constante, es decir con un movimiento rectilíneo y uniforme. De acuerdo con su principio, la trayectoria seguida por el cuerpo es tal que para toda trayectoria posible que tenga los mismos puntos extremos la expresión  $\int v ds = v \int ds$  sea un mínimo, es decir que la longitud total de la trayectoria  $s$  sea un mínimo. Este hecho que implica que la trayectoria es una línea recta, como de hecho se sabe a partir del uso los principios conocidos de la mecánica (método directo). Por argumentos similares se desarrollan los casos más generales.

Resaltemos que Euler es conciente de las restricciones de su principio. Analizando sus límites “a fin de no atribuirle más de lo que su naturaleza de permite”<sup>51</sup>, él considera, que este procedimiento de justificación solo tiene sentido para el caso que la velocidad del cuerpo depende exclusivamente de su posición. En términos modernos, este argumento propuesto por Euler para justificar su principio, tomando como hipótesis que la velocidad  $v$  sea función solo de las coordenadas espaciales, corresponde a considerar una justificación del principio de mínima acción para el caso de fuerzas que admiten un potencial<sup>52</sup>.

Poco tiempo después, Euler hace explícita su concepción física y atribuye al principio toda su generalidad al identificar la concordancia que existente entre la *ley de reposo* y la expresión de debe minimizarse en su principio  $[\sum V_i dv_i]$ <sup>53</sup> ( $V_i$  siendo las fuerzas que actúan sobre el  $i$ -ésimo cuerpo y  $dv_i$  el elemento diferencial de la distancia). Además, resalta la estrecha relación que él percibe entre la expresión que propone como cantidad de acción para el caso del equilibrio de la cuerda elástica  $[\int ds \sum V dv]$  y la expresión de la ley de reposo que Maupertuis utiliza al analizar el equilibrio de una masa fluida  $[\sum V dv]$ , a pesar que se trata de situaciones diferentes. Según Euler, por la evidencia de tal acuerdo “no puede haber ninguna duda que tanto el uno como el otro estén fundados sobre los mismos principios”<sup>54</sup>.

<sup>51</sup> Euler, L. [1744], §14. Cf Jouguet, E. [1924], tome 1, p.204.

<sup>52</sup> Cf. Jouget, E. [1924], tome 1.

<sup>53</sup> Lettres a Maupertuis, du 4, 8 et 12 juin 1748. Cf. Brunet, P. [1938].

<sup>54</sup> Euler, L. [1748]. cf. Brunet, p. 70. “... il ne peut y avoir aucun doute que l’une et l’autre soient fondées sur les mêmes principes”.

Adicionalmente, resalta el *carácter físico* que debe atribuírsele a la expresión que debe tomarse como cantidad de acción para los diferentes sistemas. Según Euler, la cantidad a ser minimizada no puede considerarse como una cantidad matemática abstracta, pues depende de la naturaleza de los sistemas físicos considerados. Sin embargo identifica una generalidad: designado  $\sum V_i dv_i$  la *cantidad de acción* de las fuerzas  $V_i$  que actúan sobre una partícula  $M$  en un cierto instante (siendo tales fuerzas funciones de las distancias  $v_i$  a los centros de fuerza), la expresión  $\int ds \sum V_i dv_i$  designará la suma de todas las acciones que actúan sobre los elementos de un cuerpo cualquiera, sea sólido o fluido, rígido o elástico, y por tanto será esta expresión la que habrá que minimizar si dicho cuerpo se encuentra en equilibrio.

De manera análoga, la expresión  $\int dt \sum V_i dv_i$  designará la suma de todas las acciones instantáneas que actúan sobre un cuerpo y será la expresión a minimizar para obtener el movimiento del sistema<sup>55</sup>.

### A modo de conclusión

Esta puesta en relación de algunas de las contribuciones y enfoque aportados por Euler y d'Alembert al establecimiento de los fundamentos de la mecánica, pone en evidencia que, bien que los fundamentos epistemológicos en los que se basan sus concepciones sobre la mecánica son diferentes, bien que la respectiva identificación de los conceptos-magnitudes significativas y su elección de los principios generales a través de los cuales los relacionan son divergentes, estos pensadores tienen en común características importantes del *estilo científico*: sus preocupaciones no se limitan sólo a una intención de matematización, también existe en ellos la intención explícita de clarificación conceptual de la mecánica a través de la *reconceptualización* de las nociones primeras y de identificación de los principios en los que debe fundamentarse esta ciencia, ambas intenciones fundamentadas, respectivamente, en presupuestos epistemológicos sobre la certeza y la validez de nuestro conocimiento.

Este análisis permite también afirmar que la mecánica no puede considerarse meramente como una rama de las matemáticas. Ella comporta, en efecto, proposiciones, enunciados y argumentos que no se reducen a la sola evidencia racional. La relación entre la física y las matemáticas existente desde los inicios de su desarrollo permite afirmar, más bien, siguiendo a Paty, que la mecánica es una ciencia *matematizable* de un género particular, porque sus magnitudes y relaciones, abstractas como ellas son, permiten describir fenómenos del mundo físico, sin que este mundo sea en sí mismo concebido idealmente<sup>56</sup>.

<sup>55</sup> *Ibidem.*, p. 74-75.

<sup>56</sup> Paty, M. [2001].

## Referencias Bibliográficas

- d'ALEMBERT, J. le R. [1743]. *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743. 2eme ed., modif. et augm., David, Paris, 1758.
- d'ALEMBERT, J. le R. & Diderot [1751-1780]. *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Rééd. Frommann, 35 vol., Struttgart-Bad Cannstadt, 1966-67.
- BRUNET, P. [1938]. *Etude historique sur le principe de la moindre action*. Hermann & cie éditeurs. Paris, 1938.
- CASSIRER, E. [1907]. *Le problème de la connaissance dans la philosophie et la science des temps modernes. Tome 2, De newton à Kant*. Traduction française par Fréreau, R. Les Editions du cerf, Paris, 2005.
- DUHEM, P. [1903]. *L'évolution de la mécanique*. Reproduction par Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.
- EULER, Leonhard [1736]. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Opera Omnia II, 1-2, Basel-Zürich, 1911-1986.
- EULER, Leonhard [1744]. *Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes*.
- EULER, Leonhard [1745]. *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan*. Piece qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences 1741, 1745, pp. 29-87. Rééd. 1752, pp. 29-87.
- EULER, Leonhard [1748]. *Réflexions sur l'espace et le temps*. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, (1748), 1750, pp. 419-447. También en Opera Omnia II, 5, Commentationes mechanicae, pp. 109-131.
- EULER, L. [1752a]. *Découverte d'un nouveau principe de mécanique*. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 6, (1750) 1752, pp. 185-217. También en Opera Omnia II, 5, Commentationes mechanicae, pp. 81-109.
- EULER, L. [1752b]. *Recherches sur l'origine des forces*. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 6, (1750) 1752, pp. 419-447. También en Opera Omnia II, 5, Commentationes mechanicae, pp. 110-131.
- EULER, Leonhard [1760-62]. *Lettres a une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & philosophie*.
- FIRODE, Alain [2001]. *La dynamique de d'Alembert*. Bellarmin / Vrin, Montreal, Paris, 2001.
- FRASER, Craig [1983]. J.L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics, Arch. For Hist. of Ex. Sci., vol. 2, No. 3, pp. 197-241.
- FRASER, Craig [1985]. J.L. Lagrange's Changing Approach to the Foundations of the Calculus of Variations, Arch. For Hist. of Ex. Sci., vol. 32, No. 2, pp. 151-191.
- GAUKROGER, S. [1982] *The metaphysics of impenetrability: Euler's conception of force*. British Journal of History of Science, 1982, 15, pp. 132-154.
- HARMAN, P. M. [1993]. Concepts of inertia: Newton to Kant. In After Newton: Essays on Natural Philosophy. Variorum, Vermont, 1993.
- HANKINS, Thomas L. [1970]. *Jean d'Alembert. Science and the Enlightenment*. Clarendon Press, Oxford, 1970. Reprint Gordon and Breach, New York, 1990.

- MAUPERTUIS, P.-L. M. [1740]. *Loi du repos*. Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. Phy., (1740) 1742, pp. 170-176.
- MAUPERTUIS, P.-L. M. [1744]. *Accord de différents Loix de la Nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles*. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 2, (1744) 1748, pp. 417-426.
- MAUPERTUIS, P.-L. M. [1746]. Les loix du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 2, (1746) 1748, pp. 267-294.
- NEWTON, I. [1687]. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Traducción española por Escohotado, A. y Sáenz de Heredia, M. (1993), Ediciones Altaya S.A., Barcelona.
- PANZA, M. [1995]. *De la nature épargnante aux forces généreuses : le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740-1751*. Revue d'histoire des sciences, 1995, 48, pp. 435-520.
- PANZA, M. [2003]. The Origins of Analytic Mechanics in the 18th Century. In Ch. 5, pp. 137-153.
- PATY, M. [2001]. "La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique", in Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.
- PATY, M. [2004]. *L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de D'Alembert*. In Morelon, Regis & Hasnawi, Ahmad (eds.) *De Zénon d'Élée a Poincaré. Recueil d'études en hommage a Roshdi Rashed*, Éditions Peeters, Louvain (Be), 2004, pp. 391-426.
- ROMERO, A. E. [2007]. *La Mécanique d'Euler. Prolégomènes à la pensée physique des milieux continus. Principes et concepts physiques, et analytisation mathématique*. Thèse de Doctorat en Epistémologie et Histoire des sciences, Université Paris 7-Denis Diderot, Paris, 2007.